Analiza I_2, egzamin 4 września 2010

9:05 — 12:35

Rozwiązania różnych zadań mają znaleźć się na różnych kartkach.

Każda kartka musi być podpisana w LEWYM GÓRNYM ROGU imieniem i nazwiskiem piszącego, jego nr. indeksu oraz nazwiskiem osoby prowadzącej ćwiczenia i nr. grupy ćwiczeniowej.

Nie wolno korzystać z kalkulatorów, telefonów komórkowych ani innych urządzeń elektronicznych; jeśli ktoś ma, muszą być schowane i wyłączone! Nie dotyczy rozruszników serca.

Nie wolno korzystać z książek, tablic ani notatek!

Wszystkie stwierdzenia należy uzasadniać. Wolno i NALEŻY powoływać się na twierdzenia, które zostały *udowodnione* na wykładzie lub na ćwiczeniach.

---

1. Niech $f_n(x) = n^\alpha x^3 e^{-nx^2}$ dla $x \in [0,1]$.

a) Dla jakich wartości parametru α ciąg (f_n) jest zbieżny punktowo do pewnej f.

b) Dla jakich wartości parametru α ciąg (f_n) jest zbieżny jednostajnie na przedziale $[0,1]$?

c) Dla jakich wartości parametru α z punktu a) zachodzi wzór

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \int_0^1 f(x)dx\ ?$$

---

2. Wyznaczyć wszystkie wartości stałej $a > 0$, dla których całka niewłaściwa $\int_0^\infty x^{-5a} \ln(1 + x^{2a})\,dx$ jest zbieżna. Znaleźć jej wartość dla $a = \frac{1}{4}$.

---

3. Znaleźć granicę $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\int_{\sin x}^{3\operatorname{tg} x} \sqrt{e^t - 1}\,dt}{\int_0^x \sqrt{t}\,dt}$.

---

4. Znaleźć granicę $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \left(1 + \dfrac{k}{n^2}\right)^n$.

Można ewentualnie posłużyć się nierównością $x > \ln(1+x) > \frac{x}{1+x}$*, która zachodzi, gdy* $0 \neq x > -1$.

---

5. Dane są funkcje nieparzyste $f, g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ pięciokrotnie różniczkowalne. Dowieść, że jeśli $j \in \{0,1,2\}$, to zachodzi równość $f^{(2j)}(0) = 0 = g^{(2j)}(0)$. Definiujemy nową funkcję: $h(x) = f(g(x)) - g(f(x))$. Dowieść, że jeśli $f'(0) = 1 = g'(0)$, to $h^{(5)}(0) = 0$.

---

6. Niech $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ będzie taką funkcją klasy C^∞, że $f(0) = 0 = f'(0)$. Wykazać, że jeżeli $x \in \mathbb{R}$ i

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f\left(\frac{x}{n}\right),$$

to $F(x) \in \mathbb{R}$ oraz że funkcja F jest nieskończenie wiele razy różniczkowalna.
